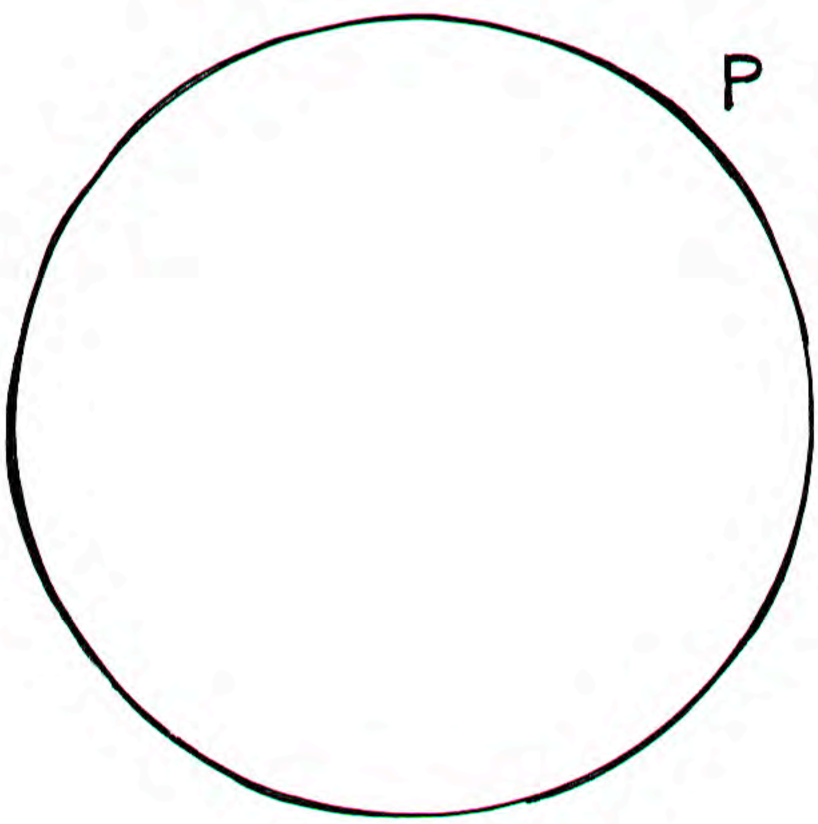
Calcul de $\sqrt{a}$

1 Jeux de quiz[1]

Marie et Jean jouent à un jeu très populaire, le jeu de quiz : Jean doit découvrir un personnage p, connu de Marie, en lui posant des questions judicieuses, Marie ne pouvant répondre que par

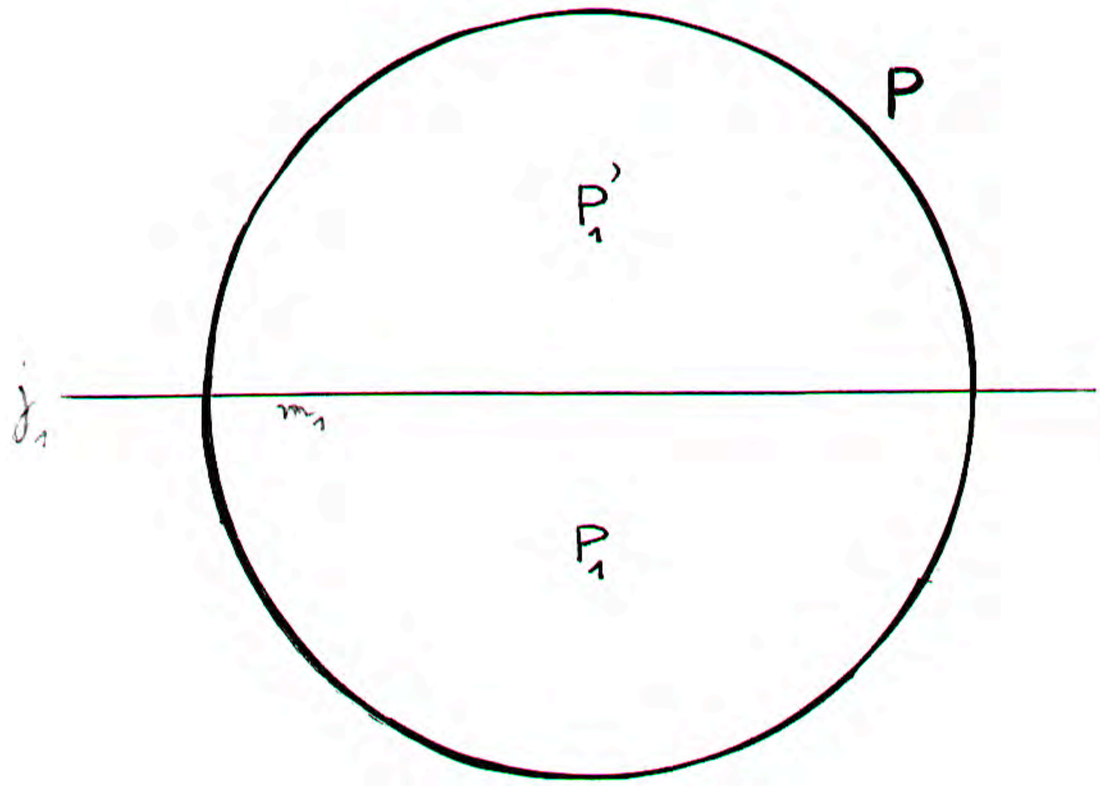
OUI ou NON

Dès avant la première question on sait, par exemple, que le personnage p appartient à l'ensemble P



[1] du latin quid = quoi

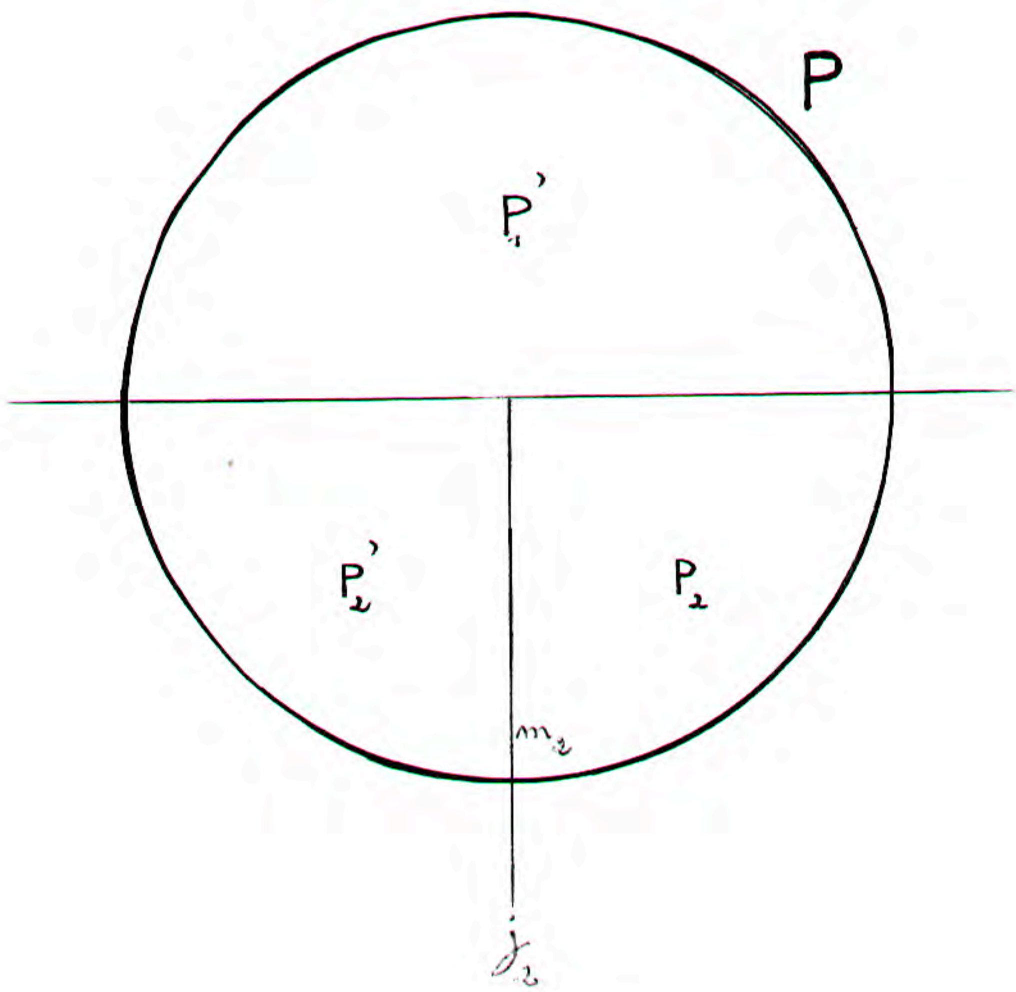
Jean : p est-il une femme ?
Marie : oui



La question j_1 posée par Jean partage P en deux parties. La réponse m_1 de Marie fixe la partie qui comprend p ; nous l'appelons P_1.

J : p est-elle encore en vie ?

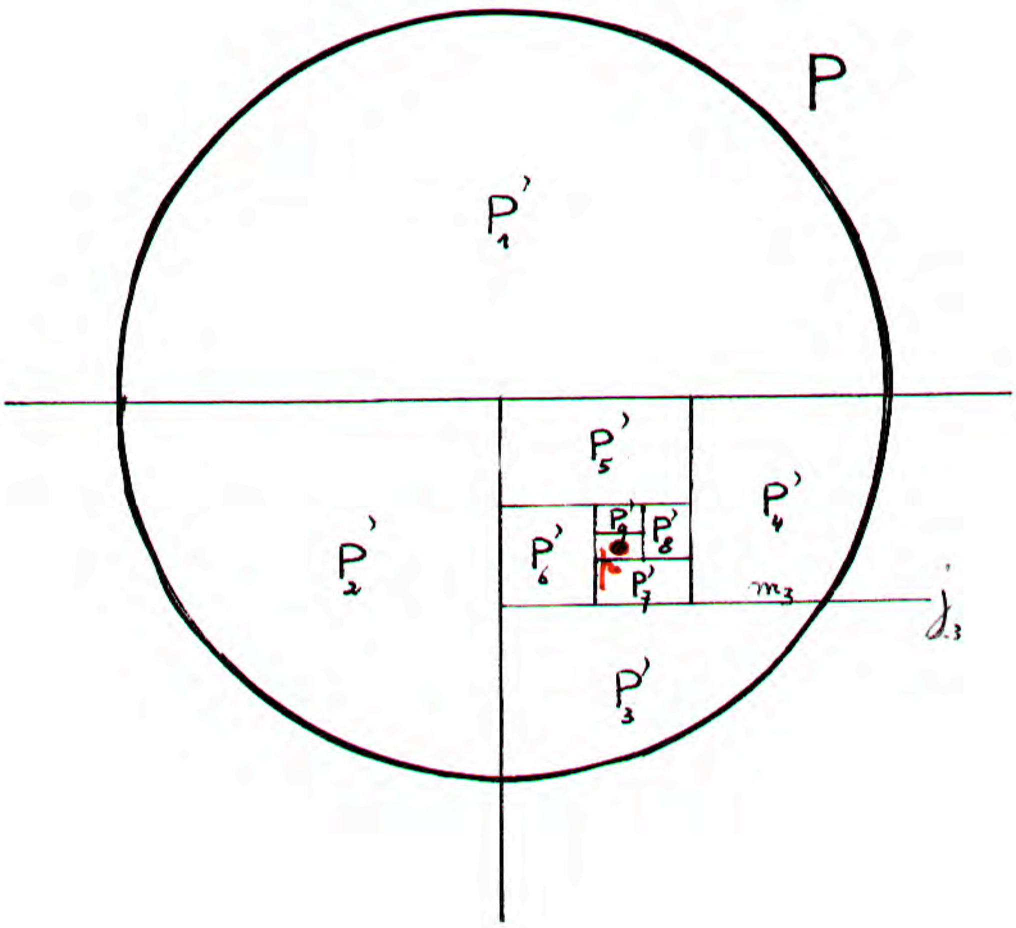
M : non



La question j_2 partage P_1 en deux parties.

La réponse m_2 fixe la partie qui comprend p ; appelons-la P_2.

et le jeu continue . . .



. . . jusqu'à la découverte de p.

$$P \supset P_1 \supset P_2 \supset \ldots \supset \{p\}$$

2 Quiz newtonien[1]

Le quiz newtonien propose au joueur J de découvrir — qui l'eût cru ? — un nombre réel r, connu du meneur de jeu M.
L'ensemble de départ est donc ici $\mathbb{R}$.

La découverte du réel r est liée à la construction d'une suite de parties de $\mathbb{R}$ comprenant r, incluses les unes dans les autres. Quoi de plus simple que l'utilisation de segments emboîtés qui comprennent r ?
Ainsi, à toute question de J qui propose un réel j, M répond par un réel m tel que

$$\boxed{j \text{ et } m \text{ encadrent } r}$$

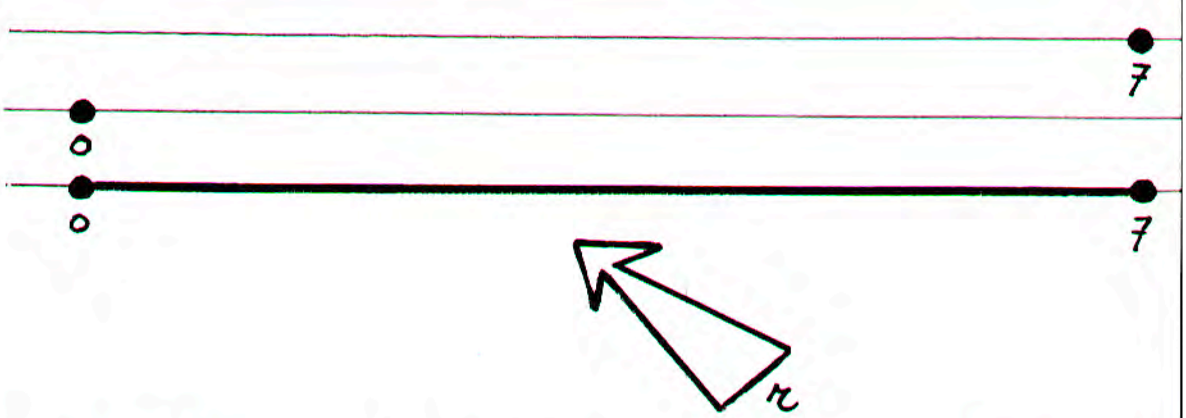
Voici le début d'une partie de quiz newtonien.
M a choisi le nombre

$$\pi = 3,14159\ldots$$

La première question de J propose un nombre réel, pris au hasard;

1 Newton (1642 - 1727) : illustre mathématicien et physicien anglais.

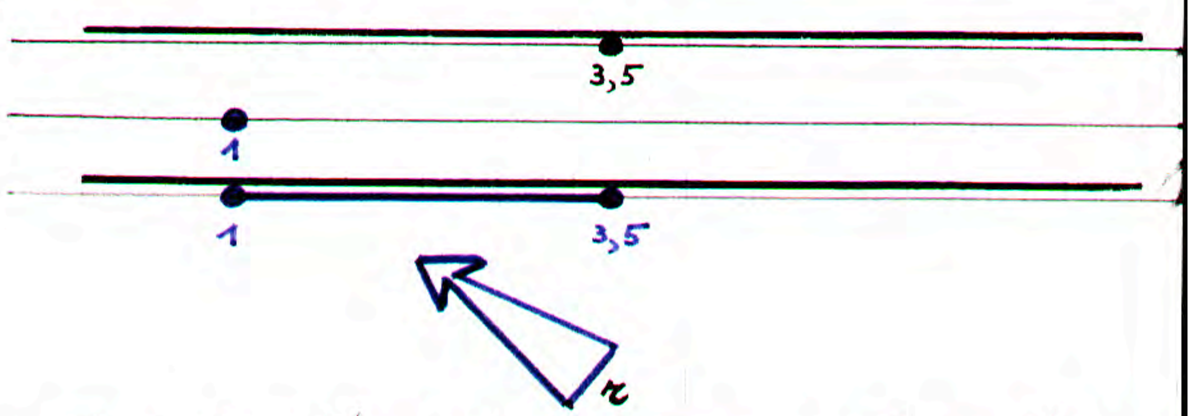
J : 7 ?
M : 0



Quelle est, en l'absence de toute autre information, la question suivante la plus judicieuse à poser par J ?

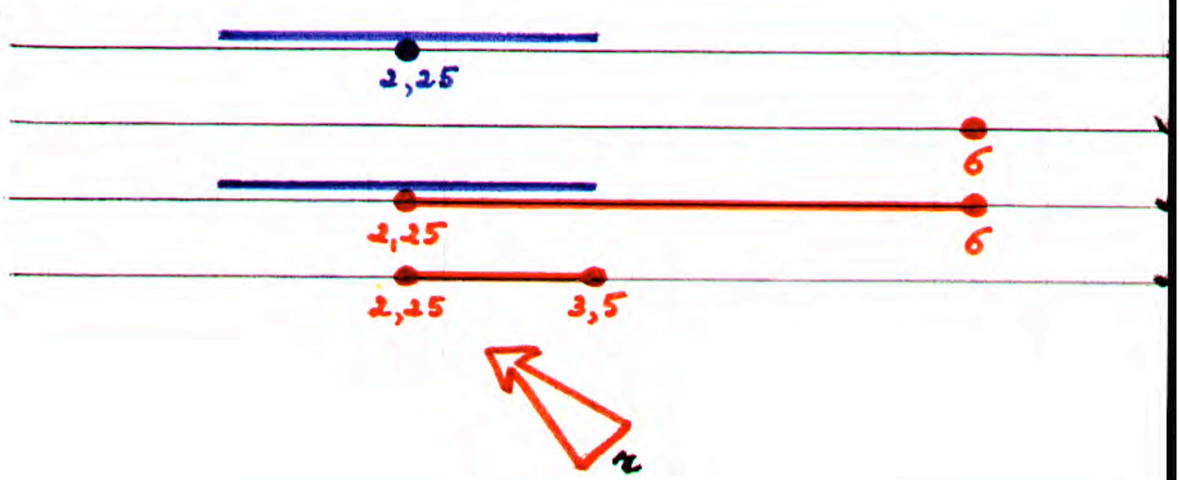
Le **MILIEU** du segment !

J : 3,5 ?
M : 1



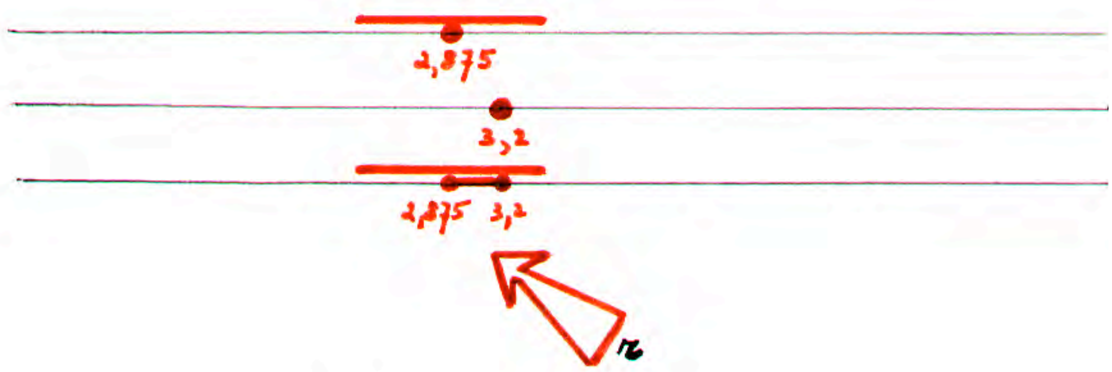
Et l'on continue, M n'étant à aucun moment lié par l'information déjà connue de J. Il suffit qu'il respecte l'unique règle du jeu : la règle d'encadrement.

J : 2,25 ?
M : 6



J : 2,875 ?

M : 3,2



• • •

- Le réel r appartient à une suite de segments fermés emboîtés dont l'une des extrémités est le milieu du précédent. La longueur de chacun de ces segments (sauf le premier) est au plus égale à la moitié de la longueur du précédent.

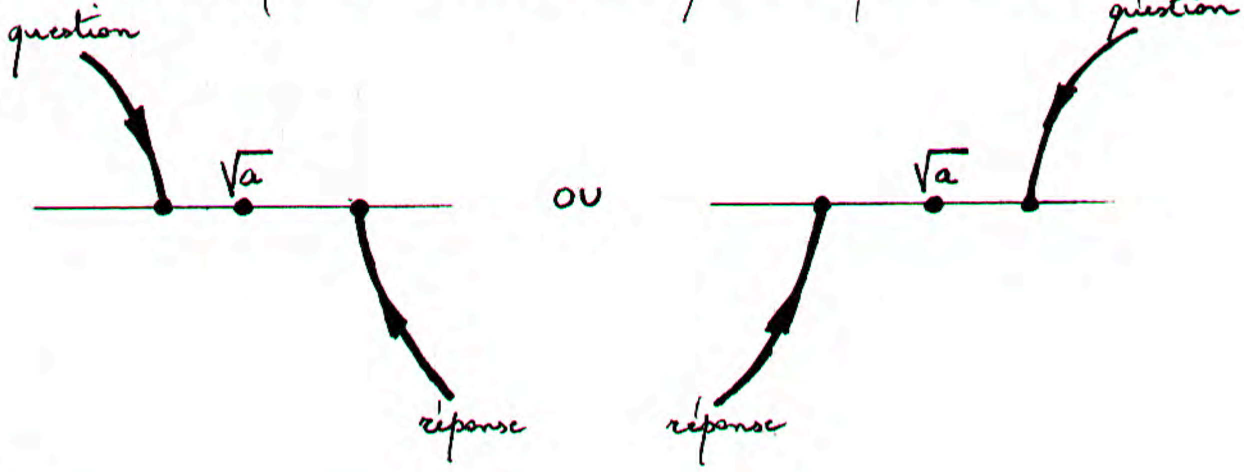
- Axiome de continuité : l'intersection de cette suite est un singleton !

<u>Exercice</u> : joue avec un copain, ou une copine, à un jeu de quiz newtonien. J peut noter graphiquement les informations reçues, comme ci-dessus, ou en aménageant ces dessins à son idée, ou encore en utilisant tout autre procédé.

3 Calcul de $\sqrt{a}$

Dans ce qui suit, les lettres désignent des réels strictement positifs.

Nos amis J et M voudraient écrire sous forme décimale la racine carrée d'un nombre réel a, en utilisant un astucieux jeu de Quiz. A cet effet il leur est évidemment plutôt utile de pouvoir déterminer comment répondre à tout réel-question par un réel-réponse



tels que

$$\boxed{\text{question et réponse encadrent } \sqrt{a}}$$

Le nombre $\sqrt{a}$ est le réel qui, multiplié par lui-même, égale a :

$$\boxed{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a}$$

Il est sans conteste beaucoup plus facile de trouver deux réels s et t dont le produit égale a :

$$\boxed{s \cdot t = a}$$

Appelons s le plus petit d'entre eux et t le plus grand.
Montrons que

$$\boxed{s \leqslant \sqrt{a} \leqslant t}$$

<u>Démonstration</u>

$$s \leqslant t$$
$$\Downarrow$$
$$s^2 \leqslant st \leqslant t^2$$
$$\Downarrow$$
$$s^2 \leqslant a \leqslant t^2$$
$$\Downarrow$$
$$s \leqslant \sqrt{a} \leqslant t$$

Exercice : justifie les implications ci-dessus.

Ainsi avons-nous résolu notre petit problème.
Comme

$$s = \frac{a}{t} \iff st = a \iff t = \frac{a}{s}$$

nos amis calculeront $\sqrt{a}$ en jouant le jeu de Quiz qui

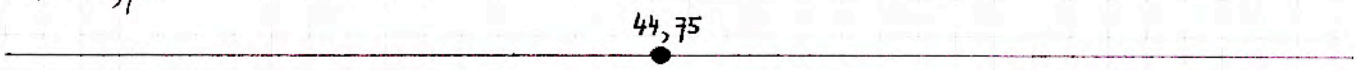
$$\boxed{\text{à tout réel-question} \quad \text{répond par} \quad \frac{a}{\text{réel-question}}}$$

Exemple $\sqrt{1980} = ?$

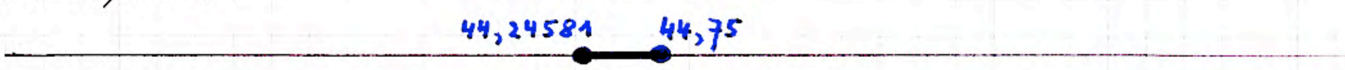
J : 40

M : 49,5

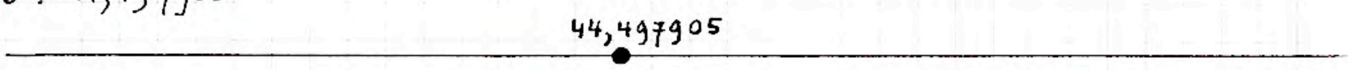
J : 44,75



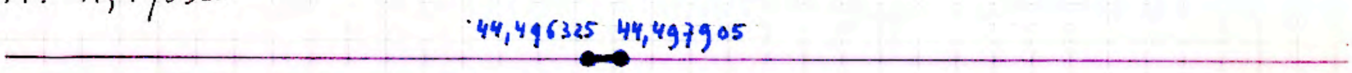
M : 44,245810



J : 44,497905



M : 44,496325



J et M arrêtent le jeu ici ! Ils estiment

$$\sqrt{1980} = 44,49 \text{ etc}$$

et vérifient

$$44,49^2 = 1979,3601$$

$$44,50^2 = 1980,25$$

44,49 est une valeur approchée par défaut de $\sqrt{1980}$, à moins de 0,01 près.

(J et M ont utilisé une minicalculatrice à 8 chiffres pour faire ces calculs.)

EX 1 Voici une présentation plus simple des calculs effectués pour trouver $\sqrt{1980}$.

question	réponse
40	49,5
44,75	44,245810
44,497905	44,496225
⋮	⋮

EX 2 Calcule la racine carrée de quelques nombres réels que tu auras choisi, à ta fantaisie, petits, grands, très petits, très grands, présentant éventuellement l'une ou l'autre particularité dans leur écriture décimale, ...

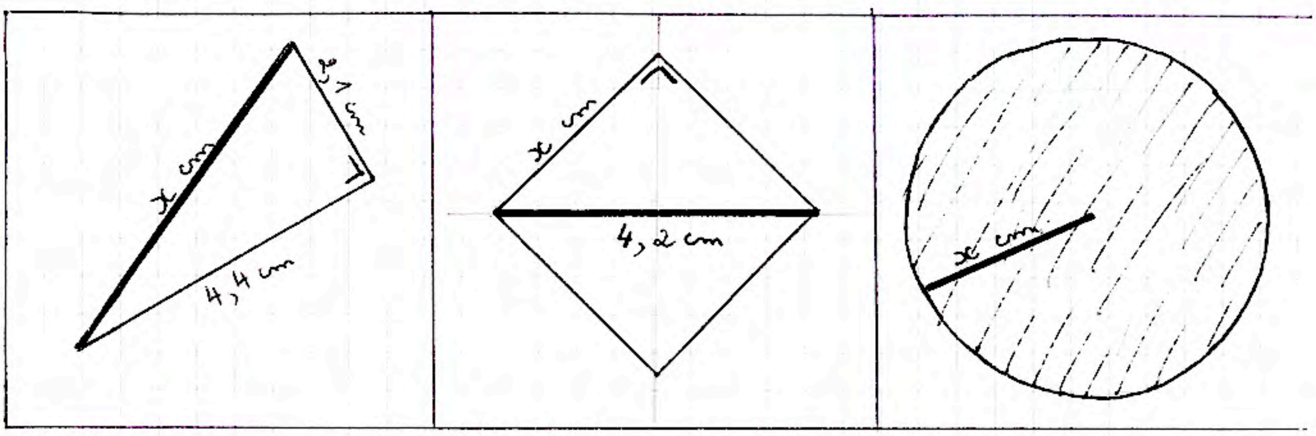
EX 3 Calcule $\sqrt{5}$.

Tenant compte de la réponse trouvée, calcule rapidement

$\sqrt{5.000.000}$ $\qquad$ $\sqrt{20}$

$\sqrt{0,0005}$ $\qquad$ $\sqrt{845}$

EX 4

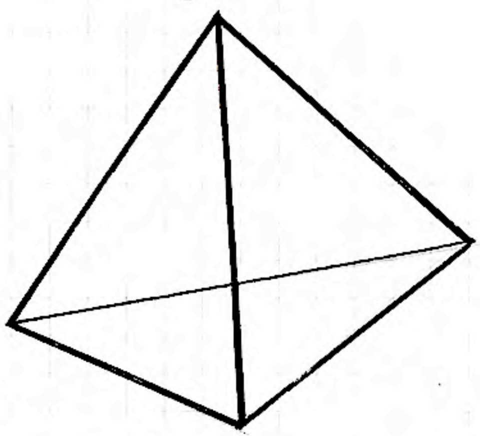


Calcule x à 0,1 près par défaut. L'aire du disque fermé égale 18,0865 cm^2.

EX 5 Calcule à 1 mm près par défaut le rayon d'une sphère dont l'aire égale 1 m^2.
(l'aire de la sphère dont le rayon est de longueur r = $4\pi r^2$)

EX 6 Calcule à 1 mm près par défaut le côté d'un cube dont l'aire égale 1 m^2.

EX 7 Calcule à 1 mm près par défaut le côté d'un tétraèdre régulier dont l'aire égale 1 m^2.



Tous les côtés
de ce tétraèdre
ont même longueur.

EX 8 On veut construire une boîte cubique dans laquelle on puisse aussi bien placer la sphère, que le cube et le tétraèdre. (cf EX 5, 6, 7). Longueur minimum du côté de cette boîte ?

EX 9 M fait trouver $\sqrt{a}$
en répondant $\frac{a}{j}$ à toute question j de J.

EX 10 A quel nombre M pense-t-il
en répondant $a - j$ à toute question j de J ?

EX 11 A quel nombre M pense-t-il
en répondant $a - 2j$ à toute question j de J ?

EX 12 Généralise l'EX précédent.